

3.4. Спектр излучения абсолютно черного тела. Формула Планка

Естественно предположить, что падающее на стенки излучающего тела электромагнитное излучение приведет к нагреву стенки и заставит атомы колебаться. Атомы кристаллической решетки, сталкиваясь между собой в процессе колебаний, будут переводить энергию колебаний во внутреннюю энергию возбуждения электронных оболочек ε с последующим излучением данной энергии в виде электромагнитных волн обратно в полость. В процессе обмена энергией между излучением и возбужденными атомами в конечном итоге должно установиться равновесие, т.е. количество поглощенной атомами энергии будет равняться количеству излученной ими электромагнитной энергии.

Процесс возбуждения атомов обычно происходит согласно статистическим закономерностям, поэтому для дальнейшего анализа воспользуемся законами статистической физики и термодинамики.

ТЕРМОДИНАМИКА ИЗЛУЧЕНИЯ. ЗАКОН СМЕЩЕНИЯ ВИНА

Важные результаты в термодинамике излучения были получены В. Вином (1864-1928) в 1893-1894 гг. Вин доказал, что равновесное излучение, заключенное в оболочке с идеально отражающими стенками, будет оставаться равновесным при квазистатическом сжатии или расширении оболочки. Кроме этого, им частично была решена задача по определению спектрального состава равновесного излучения (закон Вина) [93,94].

Поскольку формула Вина для спектральной плотности излучения представляет большой интерес и будет далее нами использована, приведем ее вывод, изложенный в работе [94].

Вначале получим уравнение адиабаты. Для этого представим, что равновесное излучение заполняет оболочку сферической формы с объемом V . При этом можно считать, что излучение является изотропным. Из волновой теории с учетом трех степеней свободы следует, что для изотропных волн плотность энергии волн ρ и давление волн на стенки p связаны соотношением

$$p = \rho/3. \quad (3.35)$$

Полная энергия излучения в оболочке равна ρV . При увеличении объема оболочки на dV за счет энергии волн совершается работа $p dV$, поэтому увеличение полной энергии равно

$$pdV = - d(\rho V) = - Vd\rho - \rho dV. \quad (3.36)$$

С учетом (3.35) этому уравнению можно придать вид

$$4\rho dV + 3Vd\rho = 0. \quad (3.37)$$

После несложного интегрирования (3.37) получаем

$$\rho V^{4/3} = \text{const}, \quad (3.38)$$

или с учетом (3.35)

$$pV^{4/3} = \text{const}. \quad (3.39)$$

Это уравнение адиабаты для изотропного излучения, аналогичное уравнению адиабаты Пуассона для идеального газа. В данном случае постоянная адиабаты $\gamma = 4/3$.

В силу эффекта Доплера при адиабатическом сжатии или расширении излучения должен меняться его спектральный состав. Допустим, что изотропное излучение занимает спектральный интервал от ω до $\omega + d\omega$. В результате отражения от движущейся стенки частота ω и ширина интервала $d\omega$ изменятся и сделаются равными ω' и $d\omega'$. При этом согласно (3.38) будет выполняться соотношение

$$\rho_{\omega} d\omega V^{4/3} = \rho'_{\omega'} d\omega' V'^{4/3} = \text{const}, \quad (3.40)$$

где V' и $\rho'_{\omega'}$ - объем и спектральная плотность энергии излучения частоты ω' в конце процесса.

Вин доказал, что, меняя адиабатически и квазистатически объем равновесного излучения в оболочке с идеально зеркальными стенками, можно получить равновесное излучение произвольной плотности, а, следовательно, и температуры. Энергию и температуру этого излучения можно найти, вычислив работу, совершенную над ним в этом процессе. Его спектральный состав найдется, если вычислить доплеровское изменение частоты излучения при его отражении от движущейся оболочки. Тем самым будет установлено определенное соотношение между параметрами равновесного излучения в начале процесса и на любой его стадии.

При бесконечно медленном адиабатическом расширении или сжатии оболочки с зеркальными стенками излучение в ней все время будет оставаться равновесным, так что его можно в любой момент времени характеризовать определенной температурой T . Выделим внутри оболочки произвольный луч, падающий на оболочку под углом ϑ (рис. П.3.1). Время между двумя последовательными отражениями этого

луча равно $\Delta t = (2r/c) \cos \vartheta$. За это время радиус оболочки r получает приращение $\Delta r = r \Delta t$. При каждом отражении происходит доплеровское изменение частоты, определяемое формулой

$$\Delta\omega/\omega = -2v(\cos \vartheta)/c = -2\Delta r(\cos \vartheta)/c\Delta t = -\Delta r/r, \quad (3.41)$$

если пренебречь квадратом бесконечно малой величины отношения радиальной скорости r расширения оболочки к скорости света.

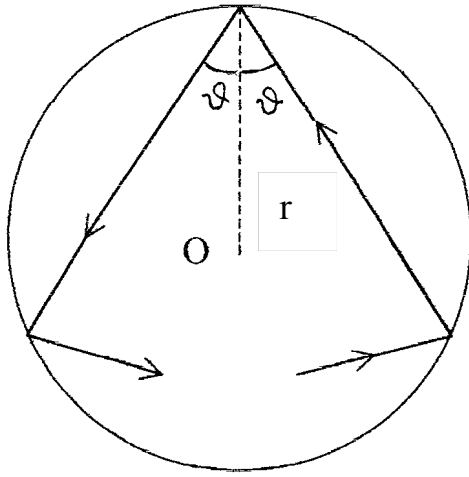


Рис. П.3.1. Отражение света с стенок излучающей полости

Относительное изменение частоты $\Delta\omega/\omega$ определяется только относительным изменением $\Delta r/r$ радиуса оболочки. Такая же формула получится и в том случае, когда за время изменения радиуса оболочки на Δr произойдет не одно, а много отражений светового луча. Требуется только, чтобы выполнялось условие $\Delta r \ll r$. При бесконечно медленном расширении величины Δr и $\Delta\omega$ можно заменить их дифференциалами, т.е. написать

$$d\omega/\omega + dr/r = 0. \quad (3.42)$$

Это означает, что реальный процесс, в котором последовательные отражения отделены друг от друга малыми, но все же конечными промежутками, при расчетах заменяется идеализированной схемой, в которой эти отражения следуют друг за другом непрерывно во времени. Интегрируя уравнение (3.42), получим

$$\omega r = \text{const.} \quad (3.43)$$

Так как $r \sim V^{1/3}$, то этот результат можно записать также в виде

$$\omega^3 V = const. \quad (3.44)$$

Поскольку он получен для бесконечно медленного процесса, величина $\omega^3 V$ является *адиабатическим инвариантом*. Комбинируя его с ранее полученными адиабатическими инвариантами (3.38) и (3.40), получим новые адиабатические инварианты. Так, из формул (3.38) и (3.44) следует

$$\omega^4/\rho = const, \quad (3.45)$$

или на основании закона Стефана - Больцмана

$$\omega/T = const. \quad (3.46)$$

Аналогично, формулы (3.40) и (3.44) дают

$$\rho_\omega d\omega/\omega^4 = const. \quad (3.47)$$

Таким образом, при квазистатическом расширении или сжатии равновесного излучения в полости с зеркальными стенками каждая квазимонохроматическая составляющая излучения ведет себя независимо от остальных составляющих и меняется так, что величины $\omega^3 V$, ρ/ω^4 и $\rho_\omega d\omega/\omega^4$ остаются постоянными, т.е. являются адиабатическими инвариантами. По теореме Вина при таком процессе излучение все время остается равновесным. Такое же излучение можно было бы получить в неподвижной оболочке, нагревая или охлаждая ее стенки. Поэтому полученные результаты можно представить как свойства только самого равновесного излучения, не связывая их ни с каким конкретным процессом. Сформулируем эти результаты следующим образом. Изменим любым способом температуру равновесного излучения от T до T' , чтобы излучение оставалось равновесным. Каждой частоте ω излучения в начальном состоянии приведем в соответствие такую частоту ω' в конечном состоянии, чтобы $\omega/T = \omega'/T'$ и, следовательно, $d\omega/T = d\omega'/T'$. Тогда плотности лучистой энергии в этих состояниях будут связаны соотношениями

$$\rho/\omega^4 = \rho'/\omega'^4, \quad (3.48)$$

$$\rho_\omega d\omega/\omega^4 = \rho'_\omega d\omega'/\omega'^4. \quad (3.49)$$

Эти результаты составляют содержание *закона смещения Вина* в его наиболее общей форме.

Из формулы (3.49) с учетом (3.46) получаем

$$\rho_{\omega}(\omega, T) = (\omega/\omega')^4 (d\omega'/d\omega) \rho'_{\omega}(\omega', T') = (T/T')^3 \rho'_{\omega}(T' \omega/T, T). \quad (3.50)$$

Это соотношение справедливо при любом значении температуры T' , а потому величина справа от T' не зависит. Величине T' можно придать любое значение, представив полученное соотношение в виде

$$\rho_{\omega}(\omega, T) = T^3 \varphi(\omega/T), \quad (3.51)$$

где $\varphi(\omega/T)$ - универсальная функция аргумента ω/T . Ввиду соотношения (3.46) тот же результат можно записать в виде

$$\rho_{\omega}(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T), \quad (3.52)$$

где $f(\omega/T) = (T'/\omega')^3 \varphi(\omega/T)$ - новая универсальная функция того же аргумента ω/T . Тем самым определение универсальной функции $\rho_{\omega}(\omega, T)$ двух аргументов сведено к задаче нахождения универсальной функции $f(\omega/T)$ одного аргумента. Отсюда следует, что если известно спектральное распределение в равновесном излучении при какой-либо произвольной температуре T' , то с помощью формулы (3.52) можно найти это распределение при всякой другой температуре T . Теперь нам осталось, используя какие-то новые свойства равновесного излучения, определить вид универсальной функции $f(\omega/T)$. Эта задача может быть решена также в рамках обычной термодинамики. Для этого воспользуемся свойствами энтропии S системы атомов, находящихся внутри излучающей полости в равновесии с излучением.

Предположим, что на поверхности сферической полости находится N атомов, которые в результате взаимных столкновений из-за нагрева полости до температуры T переходят в возбужденные состояния. Вполне естественно, что процесс столкновений и возбуждений атомов носит статистический характер и при этом устанавливается динамическое равновесие между излучением полости и возбужденными излучающими атомами.

Допустим далее, что из всех N атомов только p имеют некоторую энергию возбуждения от $\varepsilon - \Delta\varepsilon$ до $\varepsilon + \Delta\varepsilon$. Требуется связать данную энергию возбуждения ε со средней энергией U атома в полости при равновесной температуре T .

Поскольку вся средняя энергия NU перешла к p атомам, то имеет место соотношение

$$NU = p\varepsilon. \quad (3.53)$$

Количество способов, которым может быть реализовано данное состояние, или его статистический вес, определяется количеством различных сочетаний W положений возбужденных атомов на поверхности полости среди N атомов. Это число определяется как отношение числа размещений к числу перестановок, поскольку перемена местами двух одинаковых атомов ничего не меняет в состоянии системы.

В итоге мы получаем

$$W = (N + p - 1)! / (N - 1)! p! \quad (3.54)$$

Статистический вес W определяет вероятность наступления данного события. По определению энтропии она равняется

$$S = k \ln W, \quad (3.55)$$

где k - постоянная Больцмана.

Учитывая, что количество атомов N на поверхности и число возбужденных атомов p может быть достаточно велико, единицами в выражении (3.54) можно пренебречь. Возьмем натуральный логарифм от выражения (3.54) и с использованием формулы Стирлинга для больших чисел [95] получаем

$$\ln W \cong N[(1 + p/N) \ln(1 + p/N) - (p/N) \ln(p/N)]. \quad (3.56)$$

Используя равенство (3.53), в (3.56) можно произвести замену

$$p/N = U/\varepsilon. \quad (3.57)$$

Применим также хорошо известное термодинамическое соотношение (следствие из второго начала термодинамики для обратимых процессов) для системы N атомов со средней энергией NU при равновесной температуре T

$$d(NU) = T dS. \quad (3.58)$$

Продифференцировав выражение (3.56) и решая затем систему уравнений (3.55)-(3.58), мы получаем выражение для средней энергии атома на поверхности излучающей полости при равновесной температуре T

$$U = \varepsilon / [\exp(\varepsilon/kT) - 1]. \quad (3.59)$$

В этом выражении средняя энергия атома U зависит только от мгновенной энергии возбуждения атома ε и температуры T .

Выражение (3.59) для средней энергии атома может быть получено другим способом, т.е. не с использованием энтропии, а

посредством усреднения во времени энергии системы статистически возбужденных атомов. Для этого через равные небольшие промежутки времени будем фиксировать число p атомов, возбужденных до некоторой энергии ε , усредненной в диапазоне от $\varepsilon - \Delta\varepsilon$ до $\varepsilon + \Delta\varepsilon$.

Вероятность того, что на поверхности излучающей полости появится один возбужденный до энергии ε атом, пропорциональна числу N атомов и множителю $\exp(-\varepsilon/kT)$. Вероятность появления при тех же условиях двух возбужденных атомов с суммарной энергией 2ε , в силу независимости событий, будет пропорциональна множителю $\exp(-2\varepsilon/kT)$. По аналогии для появления трех возбужденных атомов с суммарной энергией 3ε получается весовой множитель $\exp(-3\varepsilon/kT)$ и т.д.

Средняя энергия атома при этом вычисляется по обычным правилам статистической физики по формуле

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon \exp(-n\varepsilon/kT)}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n\varepsilon/kT)} \quad (3.60)$$

Данная формула может быть записана в виде

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-nx)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)}, \quad (3.61)$$

где введено обозначение $x = \varepsilon/kT$. Значение знаменателя определяется формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) = 1/(1 - e^{-x}). \quad (3.62)$$

Числитель в (3.61) находится дифференцированием этой формулы по x

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-nx) = e^{-x}/(1 - e^{-x})^2, \quad (3.63)$$

и, следовательно,

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon/(e^x - 1) = \varepsilon/(e^{\varepsilon/kT} - 1). \quad (3.64)$$

Далее мы приравняем среднюю энергию атома U в формуле (3.59) средней энергии дипольного излучателя W и подставим значение U из формулы (3.59) в (3.34). В результате получаем

$$\rho(\omega) = (\omega^2/\pi^2 c^3) \varepsilon / [\exp(\varepsilon/kT) - 1]. \quad (3.65)$$

В данной формуле неопределенной остается величина ε . Сопоставляя полученную формулу (3.65) с формулой Вина (3.52) для спектральной плотности энергии ρ_ω , можно заключить, что величина ε должна иметь следующую частотную зависимость:

$$\varepsilon = \text{const } \omega, \quad (3.66)$$

где константа определяется из эксперимента. Опыт показал, что данная константа есть постоянная Планка $\hbar$. Тогда выражение (3.65) приобретает вид

$$\rho(\omega) = \hbar \omega^3 / \pi^2 c^3 [\exp(\hbar \omega / kT) - 1]. \quad (3.67)$$

Таким образом, мы получили формулу Планка, которую он вывел в 1900 г. с использованием некоторых постулатов. Отметим, что при выводе данного закона нами были использованы только классические понятия.

3.5. Закономерности фотоэффекта с классической точки зрения

Рассмотрение этого сложного вопроса начнем с анализа энергетического распределения фотоэлектронов, возникающих при облучении фотокатода светом определенного спектрального состава.

Распределение фотоэлектронов по энергиям обычно исследуют методом задерживающего потенциала в сферическом вакуумном диоде с центральным фотокатодом. Вольт-амперные характеристики сферического диода, измеренные при освещении центрального катода светом различных частот, представлены на рис. П.3.2.

Полный сбор фотоэлектронов (ток насыщения I_s) достигается при некотором положительном напряжении на аноде U_s . При подаче на коллектор отрицательного тормозящего напряжения $-U$ на него попадут только те фотоэлектроны, начальная энергия которых достаточна для преодоления тормозящего поля, т.е. $mv^2/2 > eU$. При величине задерживающего потенциала, соответствующего кинетической энергии самого быстрого фотоэлектрона, ток в цепи коллектора обращается в нуль.

Распределение фотоэлектронов по начальным кинетическим энергиям dn/dE получается дифференцированием вольт-амперных характеристик (рис. П.3.2). Форма функции распределения фотоэлектронов по энергиям напоминает максвелловское распределение частиц по скоростям, однако, имеется ограничение со стороны максимальных значений кинетической энергии фотоэлектронов E_m , которая определяется частотой падающего света, (Рис. П.3.3).

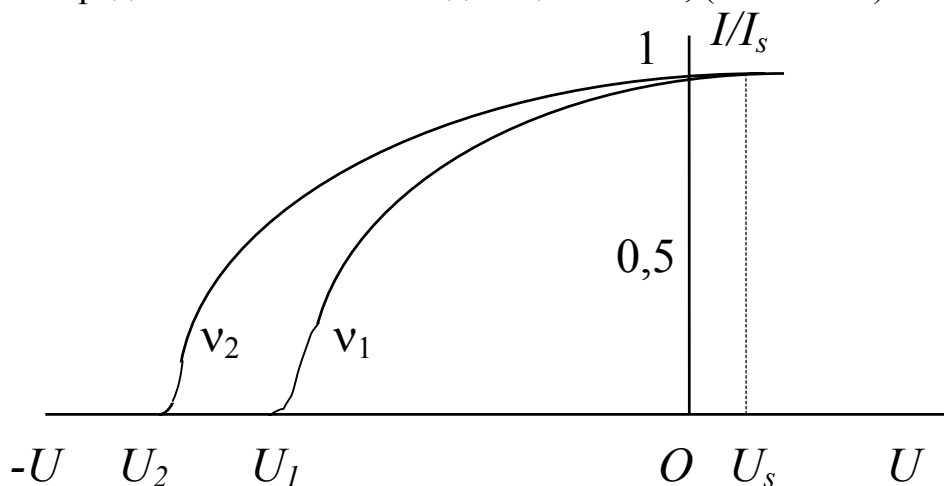


Рис. П.3.2. Вольт-амперные характеристики вакуумного фотоэлемента для двух частот падающего на фотокатод света

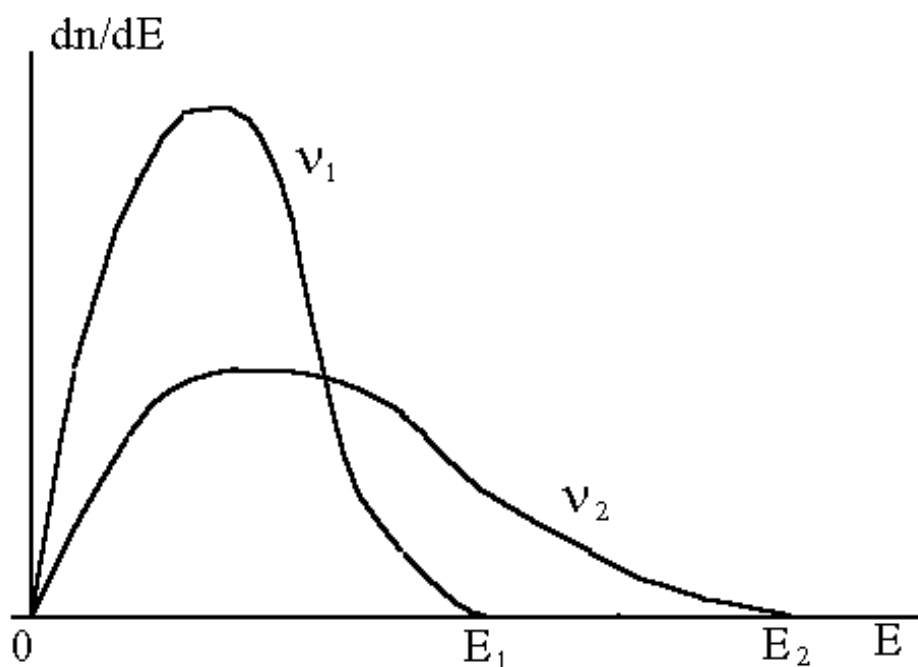


Рис. П.3.3. Энергетическое распределение фотоэлектронов для двух частот падающего на фотокатод света

Отметим характерную особенность данных кривых. Хотя облучение фотокатода производится почти монохроматическим светом, распределение фотоэлектронов по энергиям имеет непрерывный характер, как и в случае термоэмиссии. Таким образом, мы имеем дело со статистическим процессом взаимодействия электромагнитных волн с электронной плазмой фотокатода.

Из статистической физики известно, что при достаточно большом числе участвующих в процессе частиц форма функции распределения не зависит от количества частиц, а определяется другими факторами.

Функция распределения фотоэлектронов по энергиям есть функция отклика электронной плазмы фотокатода на статистическое поле падающих световых волн, которое формируется благодаря огромному числу излучающих атомов. Так как фазы и направления поляризации излучения каждого атома являются случайными, то в результате сложения огромного числа независимых волн образуется некоторое распределение статистического волнового поля по амплитудам векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Как и для многих других распределений, функция распределения по амплитудам для статистического электромагнитного поля не должна зависеть от количества участвующих в процессе излучения атомов. Подобные свойства световых полей рассматриваются в статистической оптике и статистической радиофизике [96].

На рис. П.3.2 приведены нормированные на единицу кривые фототока. В общем случае величина фототока зависит как от величины полного светового потока Φ , так и от его спектрального состава. Поэтому вольт-амперная характеристика фотоэлемента является функцией двух параметров светового потока: Φ и ν , т.е. $I = I(\Phi, \nu)$.

Предположим, что мы работаем с монохроматическим светом. Если мы увеличим в два раза световой поток Φ , то это приведет просто к двукратному увеличению фототока I . При этом форма вольт-амперной характеристики останется неизменной, поскольку вид функции распределения световых волн по амплитудам, а следовательно, и функции распределения электронов по энергиям не зависят от числа участвующих частиц, т.е. от величины светового потока Φ . Такое свойство светового потока соответствует принципу суперпозиции, и оно присуще только для статистических волн, но не для волн, генерируемых одной антенной, что очень часто путают при описании явления фотоэффекта.

Таким образом, мы получили, что величина фототока пропорциональна световому потоку для одного и того же спектрального

состава света, и его можно выразить в виде соотношения

$$I = \Phi f(\nu), \quad (3.68)$$

где $f(\nu)$ - некоторая функция частоты падающего света, определяющая также и форму вольт-амперной характеристики $I(U)$.

Теперь увеличим расстояние между источником света и фотоэлементом таким образом, чтобы световой поток, достигающий фотокатода, уменьшился в два раза. Восстановить величину светового потока Φ , а следовательно, и фототок до прежнего уровня можно, просто добавив еще один точно такой же источник света. Вполне естественно, что от двух одинаковых источников света форма вольт-амперной характеристики не должна измениться, поскольку вид функций распределения волн по амплитудам для светового поля и, следовательно, функция распределения электронов по энергиям не должны зависеть от числа излучающих атомов в источниках света.

Итак, мы приходим к важному выводу: форма нормированной вольт-амперной характеристики фотоэлемента, а следовательно, и функция распределения фотоэлектронов по энергиям для статистических волн не зависят от величины светового потока Φ и от расстояния до источника света, а определяются только спектральным составом излучения. Другими словами, масштаб энергии для фотоэлектронов определяется только частотой источника света, состоящего из огромного числа независимых излучателей - атомов.

Детальные исследования показали, что в общем случае распределение фотоэлектронов по энергиям зависит от материала и толщины фотокатода [97], однако это связано, в первую очередь, с работой выхода и с энергетическими потерями фотоэлектронов при их выходе на поверхность из глубины фотокатода.

Для очень тонких (пленочных) металлических фотокатодов вид функций распределения фотоэлектронов по энергиям является более простым и определяется, в основном, работой выхода фотоэлектрона из металла в вакуум.

После установления свойств функции распределения фотоэлектронов по энергиям осталось определить граничную энергию E_m (рис. П.3.3) как функцию частоты света ν . Пользуясь тем замечательным свойством, что функция энергетического распределения фотоэлектронов не зависит от расстояния между источником света и фотокатодом, приблизим источник света к фотокатоду настолько, чтобы существовала конечная вероятность передачи всей энергии излучения от отдельного излучающего атома одному фотоэлектрону. В разделе 3.1 было отмечено, что энергия E , которую может излучить электрон в

атоме, связана со средней разностной частотой ν движения электрона в атоме между двумя энергетическими уровнями посредством соотношения $E = h\nu$. Следовательно, $h\nu$ является максимально возможным значением энергии, которую может передать излучающий электрон в атоме отдельному фотоэлектрону.

Поскольку вероятность этой передачи ничтожно мала, то функция распределения фотоэлектронов по энергиям dn/dE в точке $E_m = h\nu$ должна обратиться в нуль. Обычно такая граничная точка на оси энергий определяется методом экстраполяции вольт-амперной характеристики к нулевому значению величины фототока.

Таким образом, мы установили, что благодаря статистическому характеру взаимодействия электронов фотокатода с электромагнитными полями граничная энергия E_m в функции распределения фотоэлектронов по энергиям dn/dE не зависит от интенсивности света и расстояния между источником света и фотокатодом, а определяется только разностной частотой ν , на которой происходит излучение света атомами, и работой выхода электронов из фотокатода.

Вполне понятно, что благодаря наличию этой работы выхода существует граничная частота ν_{min} - красная граница фотоэффекта, ниже которой фотоэффект невозможен, поскольку фотоэлектроны, обладая энергиями ниже энергетического барьера при выходе в вакуум, не могут выйти за пределы фотокатода.

Внешне явление фотоэффекта напоминает рассеяние некоторых сгустков энергии $h\nu$ подобно частицам на электронах фотокатода, что и побудило физиков ввести некие гипотетические частицы, названные фотонами и обладающие данной энергией $h\nu$. Теперь же мы видим, что эта гипотеза очень далека от реальных статистических процессов обмена энергией между электронами и полем электромагнитных волн со случайным распределением по амплитудам напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.